# Föreläsning 13

Ibland kan man lösa så kallade extremvärdes-problem genom att maximera/minimera m.h.a funktioner. Vi ska nu räkna exempel på detta:

**Ex:**

Antag att $x+y=40$ och $x,y \geq 0$. Vad är största möjliga värde på $x \cdot y$?

**LF:**

Vi har att $y=40-x$. Kalla produkten $x \cdot y$ för

$$P(x) = x \cdot y = x(40-x) = 40x - x^2.$$

Vi vill nu maximera $P$; så vi deriverar.

$$P'(x) = 40-2x.$$

Kritiska punkter för $P$ är därför då $P'(x)=0$, dvs då $40-2x=0 \Leftrightarrow x=20$.

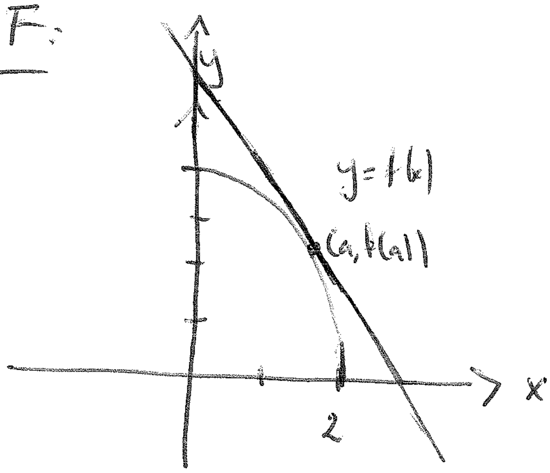
Detta betyder att största värdet för $P$ ges av

$$P(20) = 40 \cdot 20 - 20^2 = 800 - 400 = 400.$$

Ex:

Betrakta kurvan $\overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{y}} = 4 - x^2$. Betrakta en punkt $x = a > 0$, $y = f(a)$ på kurvan. Dra en tangent till kurvan i denna punkt $(a, f(a))$. Då bildar tangenten x-axeln och y-axeln en triangel. Arean av triangeln beror på a. För vilket a så får denna triangel minst area, och vad blir arean då?

LF:




Vi börjar med att ta fram tangentens ekvation. Derivatan för f ger lutningen för tangenten:

$$f'(x) = -2x \quad \Rightarrow \quad f'(a) = -2a.$$

Därför ges tangentens ekvation av

$$y_T - f(a) = -2a(x - a)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y_T = -2ax + 2a^2 + f(a) = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 =$$

$$= -2ax + a^2 + 4.$$

③

Vi måste nu ta fram tangentens skärning med x- respektive y-axeln.

Tangenten skär y-axeln då $y_T(0) = a^2+4$.

Tangenten skär x-axeln då

$$y_T(x) = 0 \iff -2ax + a^2+4 = 0 \iff x = \frac{a^2+4}{2a}.$$

Arean för en triangel ges av $\frac{bas \cdot höjd}{2}$, så

$$A(a) = \frac{(a^2+4)\cdot\frac{(a^2+4)}{2a}}{2} = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

är arean för triangeln.

Vi ska minimera denna area, så vi måste hitta kritiska punkter. Derivering av A ger:

$$A'(a) = \frac{2(a^2+4)\cdot 2a \cdot 4a - 4(a^2+4)^2}{16a^2} =$$

$$= \frac{(a^2+4)(16a^2 - 4(a^2+4))}{16a^2} =$$

$$= \frac{(a^2+4)(12a^2-16)}{16a^2} = \frac{4(a^2+4)(3a^2-4)}{16a^2}$$

Detta ger att $A'(a) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow$$

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Eftersom $a > 0$ så är den enda lösningen vi söker $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Detta ger minsta arean

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\right)^2}{4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\left(\frac{4}{3} + 4\right)^2}{4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{16}{9}^2}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \frac{16^2 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot 9} =$$

$$= \frac{16 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3} =$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{9} \text{ a.e.}$$

---

**Ex:**

En tillverkare för dricka vill tillverka cylindriska burkar för att förvara och säljä dricka i. Varje burk har en volym av 22 cm$^3$. Vilken dimension för burken krävs för att minimera materialåtgången till burken.

**LF:**

Låt radien ges av $r$ och höjden av $h$. Ytarean för burken ges av

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

Det är $S$ vi vill minimera.
Kom ihåg att volymen ges av $V = \pi r^2 h$, och den ska vara 22, så

$$\pi r^2 h = 22 \iff h = \frac{22}{\pi r^2}.$$

Sätt in detta i $S$, så får vi att $S$ är en funktion i $r$:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \left(\frac{22}{\pi r^2}\right) =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{44}{r}.$$

Vi vill nu hitta kritiska punkter för $S$, så vi deriverar:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{44}{r^2}$$

Kritiska punkter ges av $S'(r) = 0$, dvs

$$4\pi r - \frac{44}{r^2} = 0$$

Detta ger att $\dfrac{4\pi r^3 - 44}{r^2} = 0 \iff r^3 = \dfrac{44}{4\pi} = \dfrac{11}{\pi}$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{11}{\pi}}$$

För detta r så har vi att

$$S\left(\left(\frac{\pi}{11}\right)^{1/3}\right) = 2\pi\left(\left(\frac{\pi}{11}\right)^{1/3}\right)^2 + \frac{44}{(\pi/11)^{1/3}} =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\pi}{11}\right)^{2/3} + \frac{44 \cdot 11^{1/3}}{\pi^{1/3}} \approx 33,77\,cm.$$

Vi har att $r = \left(\frac{11}{\pi}\right)^{1/3} \approx 1,5\,cm$

$$h = \frac{22}{\pi \cdot r^2} \approx 3\,cm.$$

Alltså burkens höjd skall vara ungefär dubbelt så ~~stor~~ stor som radien.

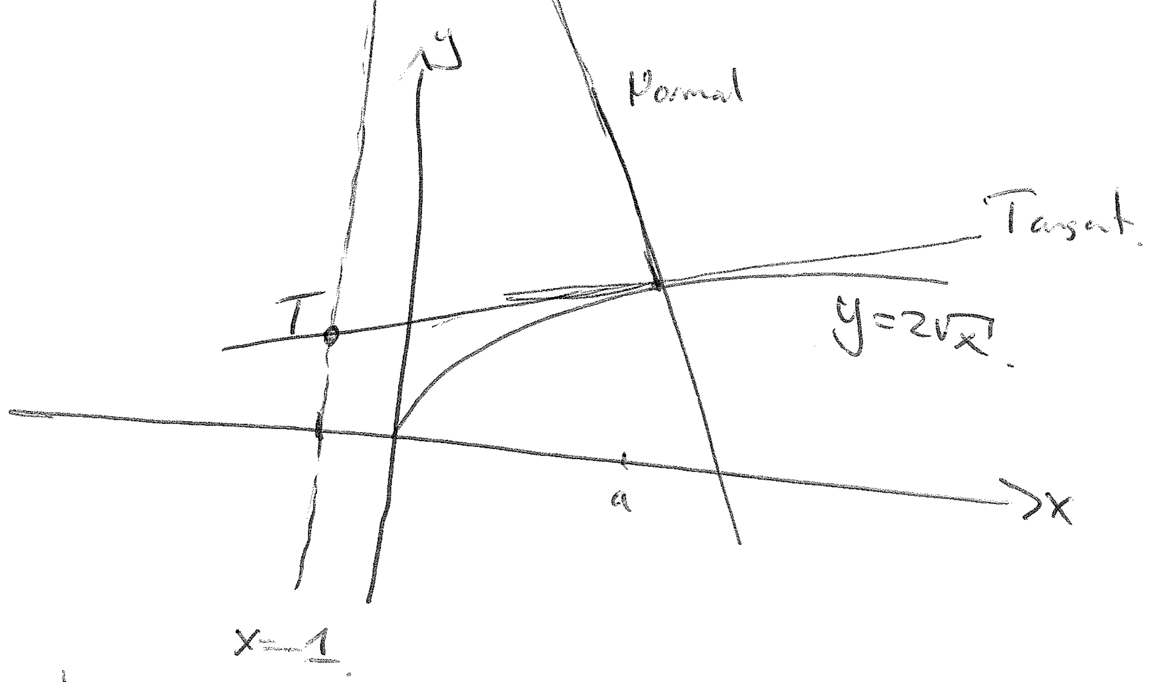
---

Ex:

Betrakta kurvan $y = 2\sqrt{x}$ ($y = f(x)$). Betrakta en punkt $(a, f(a))$ på kurvan för $a > 0$. Dra tangenten och normalen till denna punkt. De skär tangenten och normalen linjen $x = -1$ i punkterna $T$ respektive $N$. Uttryck sträckan $NT$ som en funktion av $a$ och bestäm dess minsta värde då $a$ varierar längs kurvan.

LF:

V: börja med att göra en figur




V: börja med att hitta tangentens ekvation.

V: deriverar: $y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Tangentens lutning i $x=a>0$ ges av $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Därför ges tangentens ekvation av (enpunktsformel).

$$y_T - f(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y_T = \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}} + 2\sqrt{a}$$

8

Normalens lutning ges av $\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot k_N = -1$

$\iff$

$k_N = -\sqrt{a}$.

Normalens ekvation ges av.

$$y_N - f(a) = -\sqrt{a}(x-a)$$

$$\iff$$

$$y_N = -\sqrt{a}x + a\sqrt{a} + 2\sqrt{a}.$$

$y_T$ skär $x=-1$ i $T = y_T(-1) = -\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}} + 2\sqrt{a} =$

$= -\frac{(1+a)}{\sqrt{a}} + 2\sqrt{a}.$

$y_N$ skär $x=-1$ i $N = y_N(-1) = \sqrt{a} + a\sqrt{a} + 2\sqrt{a} =$

$= \sqrt{a}(3+a).$

Vi ska hitta avståndet mellan $N$ och $T$.

Detta avståndet ges av $y_N - y_T = NT$:

$$NT(a) = y_N - y_T = \sqrt{a}(3+a) - \left(\frac{-(1+a)}{\sqrt{a}} + 2\sqrt{a}\right) =$$

$$= \sqrt{a}(3+a) + \frac{a+1}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{a} =$$

$$= (a+1)\sqrt{a} + \frac{a+1}{\sqrt{a}} = (a+1)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Vi deriverar nu NT:

$$NT'(a) = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + (a+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + (a+1)\left(\frac{a-1}{2a\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{a^2-1}{2a\sqrt{a}}$$

Vill hitta kritiska punkter så vi vill veta då $NT'(a)=0$, dvs då

$$0 = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{a^2-1}{2a\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} + 2a + a^2 - 1}{2a\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{2a^2 + 2a + a^2 - 1}{2a\sqrt{a}} = \frac{3a^2 + 2a - 1}{2a\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{3(a - 1/3)(a+1)}{2a\sqrt{a}}$$

Därför $a = 1/3$ och $a = -1$ kritiska punkter.

Eftersom $a > 0$ så är $a = 1/3$ en minpunkt.

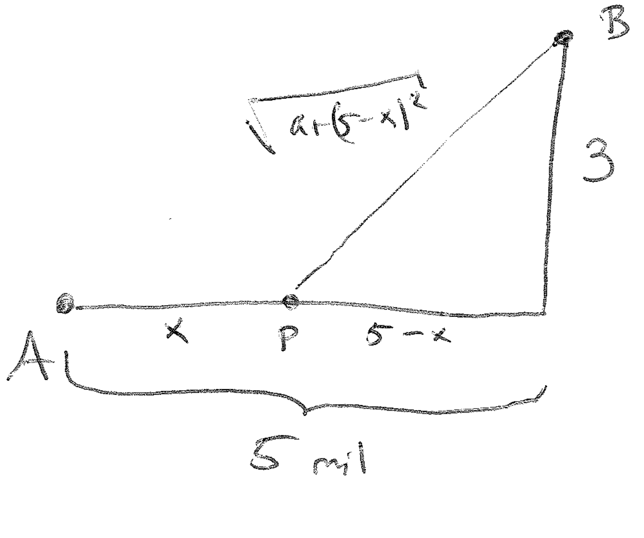
För $a = 1/3$ så är $NT(1/3) = \left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right) =$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)4}{3\sqrt{3}}\ \text{le} \ (\approx 2{,}1\ \text{le}).$$

Ex:

En kommun tänker bygga en ny väg mellan städerna A och B. Stad A ligger på en övergiven väg som går öst ↔ väst. Stad B är 3 mil norr om den punkt som är 5 mil öst om A. Ingenjörerna föreslår att den nya vägen ska bestå av en del av den gamla vägen från A till en punkt P och sen göra en ny väg från P till B. Man tänkte renovera den delen av den gamla vägen från A till P. Om kostnaden för renovering är 200 000kr/mil och för konstruktion av ny väg är 400 000kr/mil, hur mycket av den gamla vägen ska man renovera för att minimera den totala kostnaden för vägen mellan A till B.

LF:



Observera att sträckan P till B är en rät linje, eftersom detta är den kortaste vägen.
Låt x vara den del av gamla vägen som ska renoveras. (i mil). Den nya vägen är då

$$\sqrt{9+(5-x)^2} = \sqrt{9+25-10x+x^2} = \sqrt{34-10x+x^2}$$

mil lång. Kostnaden för hela vägen ges av

$$K(x) = 200000 \cdot x + 400000\sqrt{34-10x+x^2} \quad ; \quad x \in [0,5].$$

Vi vill nu minimera denna funktion, så vi deriverar för att hitta kritiska punkter:

$$K'(x) = 200000 + \frac{400000}{2\sqrt{34-10x+x^2}} \cdot (-10+2x) =$$

$$= 200000 + \frac{400000(x-5)}{\sqrt{34-10x+x^2}}$$

Kritiska punkter ges av

$$K'(x) = 0 \iff 200000 + \frac{400000(x-5)}{\sqrt{34-10x+x^2}} = 0$$

$$\iff$$

$$\frac{\sqrt{34-10x+x^2} + 2(x-5)}{\sqrt{34-10x+x^2}} = 0$$

Denna ekvation är noll om

$$\sqrt{34-10x+x^2} = -2(x-5)$$

Kvadrera:

$$34-10x+x^2 = 4(x-5)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3x^2-30x+66=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2-10x+22=0.$$

Kvadratkomplettering ger att

$$0=(x-5)^2-25+22=(x-5)^2-(\sqrt{3})^2=$$

$$=(x-5+\sqrt{3})(x-5-\sqrt{3})$$

Alltså de kritiska punkterna är $x=5\pm\sqrt{3}$.

Eftersom x måste ligga i intervallet $[0,5]$ så är den enda kritiska punkten $x=5-\sqrt{3}\approx 3{,}27$.

Detta ger kostnaden

$$K(5-\sqrt{3})\approx 2039230 \text{ kr.}$$

Om man använder bara den gamla vägen så är kostnaden 2200000 kr, och bara ny väg kostar ~~23~~ 2332400 kr.